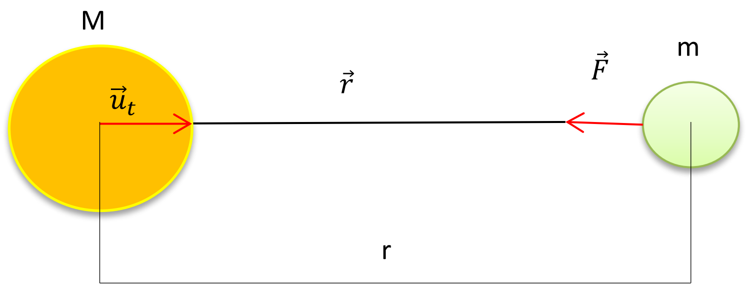
# TEMA 1

# CAMPO GRAVITATORIO

# 1.1. LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL

La interacción gravitatoria entre dos cuerpos corresponde a una fuerza central atractiva proporcional a las masas de los cuerpos e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos.

Así la fuerza que ejerce el cuerpo de masa ***M*** sobre el cuerpo de masa ***m*** será:




$$\boldsymbol{\vec{F} = G\frac{Mm}{r^2}\cdot\overrightarrow{u_r}}$$

Donde: $\boxed{\boldsymbol{G = 6.67\times 10^{-11} N.m^2.kg^{-2}}}$

# EJERCICIOS 1.1.

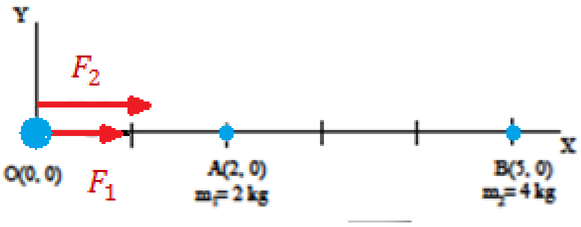
**1. En el punto A (2,0) se sitúa una masa de 2 kg y en el punto B(5,0) se coloca otra masa de 4 kg. Calcula la fuerza resultante que actúa sobre una tercera masa de 5 kg cuando se coloca en el origen de coordenadas y cuando se sitúa en el punto C(2,4).**

En una distribución de masas la fuerza resultante que actúa sobre una de ellas es la suma vectorial de las fuerzas con las que actúan las demás masas sobre ellas.

a)

<u>Datos:</u>

$m = 5kg \rightarrow O(0,0)$
$m_1 = 2kg \rightarrow A(2,0)$
$m_2 = 4kg \rightarrow B(5,0)$




Al colocar la masa $m$ en $O$. Las masas $m_1$y $m_2$interaccionan con la masa $m$ con unas fuerzas que tienen de dirección el eje X y sentido hacia las masas $m_1$ y $m_2$.

Aplicando la ley de gravitación universal se tiene:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = G\frac{m_1 . m}{r_1^2}\vec{\imath} + G\frac{m_2 . m}{r_2^2}\vec{\imath} = G.m\left(\frac{m_1}{r_1^2} + \frac{m_2}{r_2^2}\right)\vec{\imath}$$

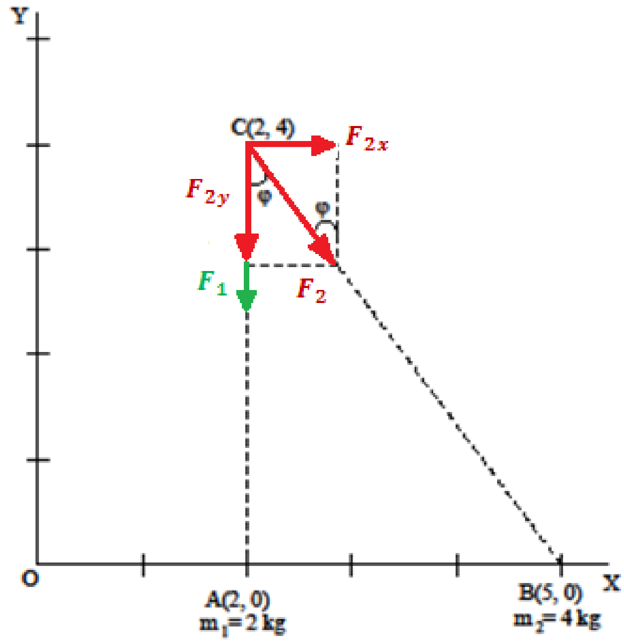
Sustituyendo:

$$\vec{F} = 6{,}67.10^{-11}.5.\left(\frac{2}{2^2} + \frac{4}{5^2}\right)\vec{\imath} = \boxed{2{,}20.10^{-10}\vec{\imath}\ N}$$

b)

<u>Datos:</u>

$m = 5kg \rightarrow C(2,4)$
$m_1 = 2kg \rightarrow A(2,0)$
$m_2 = 4kg \rightarrow B(5,0)$




Al colocar la masa $m$ en $C$. Las fuerzas que actúan sobre $m$ tienen de dirección las rectas que unen la citada masa con las otras dos y por sentido hacia la masa $m_1$y $m_2$.

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{1}} = \boldsymbol{G}\frac{\boldsymbol{m_1.m}}{\boldsymbol{r_1^2}}(-\vec{\boldsymbol{j}}) = -6{,}67.10^{-11}\frac{2\,.5}{4^2} - \vec{j} = -4{,}17.10^{-11}\vec{j}\,N$$

El módulo de la fuerza con la que actúa la masa $m_2$ es:

$$F_2 = G\frac{m_2.m}{r_2^2} = 6{,}67.10^{-11}\frac{4\,.5}{\left(\sqrt{3^2+4^2}\right)^2} = 5{,}34.10^{-11}\ N$$

De la figura y aplicando el Teorema de Pitágoras se deduce que:

$$\sin\varphi = \frac{3}{5} \qquad \cos\varphi = \frac{4}{5}$$

Por lo que las componentes de la fuerza que ejerce la masa $m_2$ son:

$$\boldsymbol{F_{2x}} = \vec{F}_2.\sin\varphi\,.\vec{\imath} = 5{,}34.10^{-11}.\frac{3}{5}\vec{\imath} = 3{,}20.10^{-11}\vec{\imath}\,N$$

$$\boldsymbol{F_{2y}} = \vec{F}_2.\cos\varphi\,.(-\vec{\jmath}) = -5{,}34.10^{-11}.\frac{3}{5}\vec{\jmath} = -4.27.10^{-11}\vec{\jmath}\,N$$

La fuerza resultante que actúa sobre la partícula de masa m tiene dos componentes:

$$\vec{F}_y = \vec{F}_1 + \vec{F}_{2y} = -4{,}17.10^{-11}\vec{\jmath} - 4{,}27.10^{-11}\vec{\jmath} = -8{,}44.10^{-11}\vec{\jmath}\,N$$

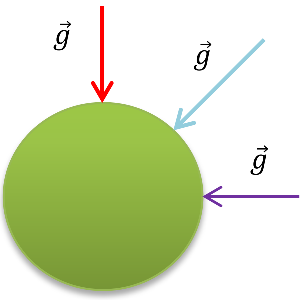
Su módulo es:

$$|\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(3{,}20.10^{-11})^2 + (8{,}44.10^{-11})^2} = \boxed{9{,}03.10^{-11}\ N}$$

# 1.2. INTENSIDAD DEL CAMPO GRAVITACIONAL.

El **campo gravitatorio** o **campo gravitacional** es un campo de fuerzas que representa la gravedad.

$$\vec{g} = G\frac{M}{r^2} \cdot \overrightarrow{u_r}$$

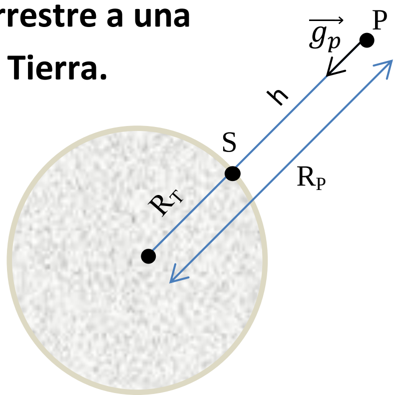



Vector intensidad y campo gravitacional que expresa una característica del espacio.

# EJERCICIOS 1.2.

1. **Calcula el módulo del campo gravitatorio terrestre a una distancia de 100 km sobre la superficie de la Tierra.**

   **$M_T$ = 5,98·10$^{24}$ kg, $R_T$ = 6370 km.**




Aplicando la definición del campo gravitatorio y como la Tierra se comporta como una partícula con su masa concentrada en su centro, se tiene:

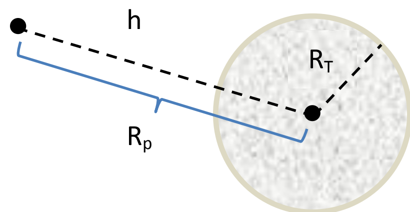
$$g = G\frac{M_T}{r^2} = G\frac{M_T}{(R_T+h)^2}$$

Sustituyendo valores:

$$g = 6{,}67.10^{-11}\frac{5{,}98.10^{24}}{(6{,}37.10^6+10^5)^2} = \boxed{9{,}53\ {}^{N}\!/_{kg}}$$

2. **A que altura sobre la superficie de la Tierra, la intensidad del campo gravitatorio terrestre (g) se reduce a la tercera parte? Expresar el resultado en función del radio de la Tierra.**

<u>Datos:</u>




$g_p$ = intensidad del campo gravitatorio en P

$g_s$ = intensidad del campo gravitatorio en la superficie

$$g_p = \frac{g_s}{3} \Rightarrow 3 = \frac{g_s}{g_p}$$

En general:

$$G\frac{Mm}{R^2} = mg \Rightarrow g = G\frac{M}{R^2}$$

En la superficie de la Tierra:

$$\boldsymbol{g_s = G\frac{M}{R_T^2}}$$

En el punto P:

$$\boldsymbol{g_P = G\frac{M}{R_P^2}}$$

Haciendo:

$$\boldsymbol{\frac{g_S}{g_P} = \frac{G\frac{M}{R_T^2}}{G\frac{M}{R_P^2}} = \frac{R_P^2}{R_T^2} = 3}$$

Donde: $\boldsymbol{R_P = R_T + h}$

Se obtiene:

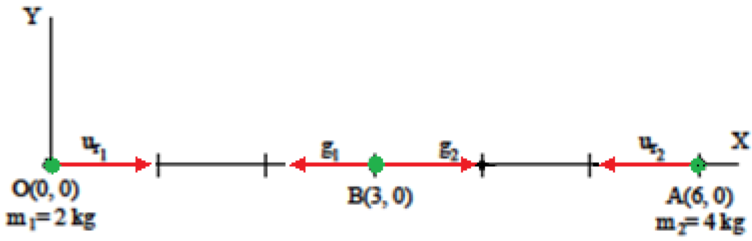
$$\boldsymbol{(R_T + h)^2 = 3R_T^2 \Rightarrow R_T + h = \sqrt{3R_T^2} \Rightarrow h = \sqrt{3}\,.R_T - R}$$

$$\boxed{\boldsymbol{h = R_T\left(\sqrt{3} - 1\right)}}$$

3. **Una partícula de masa $m_1$ = 2 kg está situada en el origen de un sistema de referencia y otra partícula de masa $m_2$ = 4 kg está colocada en el punto A(6,0). Calcula el campo gravitatorio en los puntos de coordenadas B(3,0) y C(3,4) y la fuerza que actúa sobre una partícula de 3 kg de masa situada en el punto C.**

Aplicando el principio de superposición, el campo gravitatorio en un punto es igual a la suma vectorial de los campos individuales que actúan en ese punto.

**a)** Campo gravitatorio en el punto B.




$$\vec{g}_1 = G\frac{m_1}{r_1^2}\vec{u}_{r1} = G\frac{2}{3^2}(-\vec{\imath}) = -G\frac{2}{9}\vec{\imath}$$

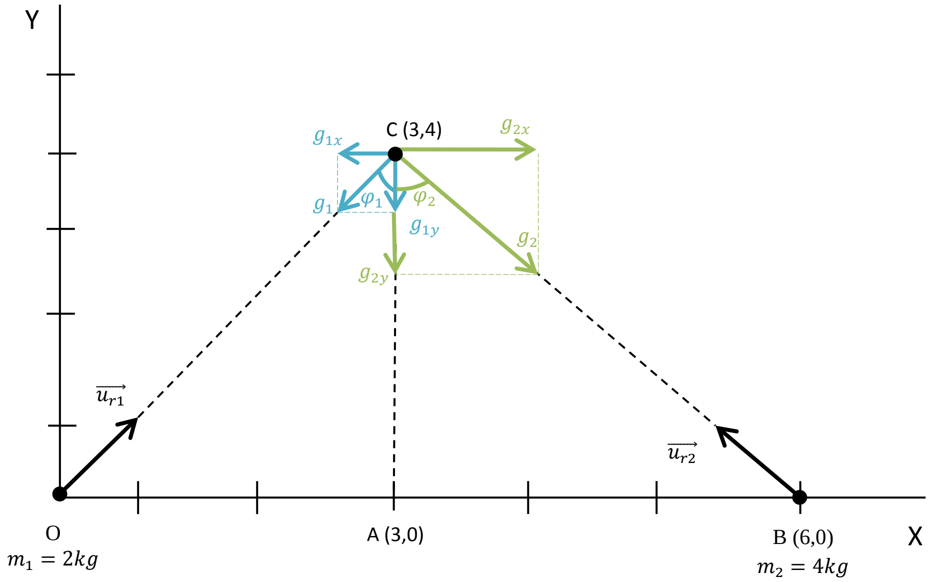
$$\vec{g}_2 = G\frac{m_2}{r_2^2}\vec{u}_{r2} = G\frac{4}{3^2}\vec{\imath} = G\frac{4}{9}\vec{\imath}$$

Sumando:

$$\vec{g}_B = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = -G\frac{2}{9}\vec{\imath} + G\frac{4}{9}\vec{\imath} = G\frac{2}{9}\vec{\imath} = 1{,}48.10^{-11}\vec{\imath}\ {}^{N}/_{kg}$$

**b)** Campo gravitatorio en el punto C.

El campo gravitatorio está a la misma distancia de cada una de las partículas, aplicando el teorema de Pitágoras d=5m. Los campos creados por cada una de las partículas son:




$$g_1 = G\frac{m_1}{r_1^2} = G\frac{2}{5^2} = G\frac{2}{25}$$

$$g_2 = G\frac{m_2}{r_2^2} = G\frac{4}{5^2} = G\frac{4}{25}$$

Teniendo en cuenta la figura para determinar las relaciones trigonométricas de los respectivos ángulos y aplicando el principio de superposición, se tiene:

$$\vec{\boldsymbol{g}}_{1x} = \vec{g_1}\sin\varphi_1(-\vec{\imath}) = -G\frac{2}{25}\frac{3}{5}\vec{\imath} = -G\frac{6}{125}\vec{\imath}$$

$$\vec{\boldsymbol{g}}_{2x} = \vec{g_2}\sin\varphi_2\vec{\imath} = G\frac{4}{25}\frac{3}{5}\vec{\imath} = G\frac{12}{125}\vec{\imath}$$

$$\boldsymbol{\vec{g}_x = G\frac{6}{125}\vec{\imath}}$$

Sustituyendo:

$$\vec{\boldsymbol{g}}_{1y} = \vec{g}_1.\cos\varphi_1.(-\vec{\jmath}) = -G\frac{2}{25}\frac{4}{5}\vec{\jmath} = -G\frac{8}{125}\vec{\jmath}$$

$$\vec{\boldsymbol{g}}_{2y} = \vec{g}_2\cos\varphi_2\,(-\vec{\jmath}) = -G\frac{4}{25}\frac{4}{5}\vec{\jmath} = -G\frac{16}{125}\vec{\jmath}$$

$$\vec{g}_y = -G\frac{25}{125}\vec{j}$$

Sustituyendo:

$$\vec{g}_c = \vec{g}_x + \vec{g}_y = (3{,}20.10^{-12}\vec{\imath}) - 12{,}8.10^{-12}\vec{\jmath})\ {}^{N}/_{kg}$$

$$|\vec{g}_c| = \sqrt{g_x^2 + g_y^2} = \sqrt{(3{,}20.10^{-12})^2 + (12{,}8.10^{-12})^2} =$$

$$\boxed{= 1{,}32.10^{-11}\ {}^{N}/_{kg}}$$

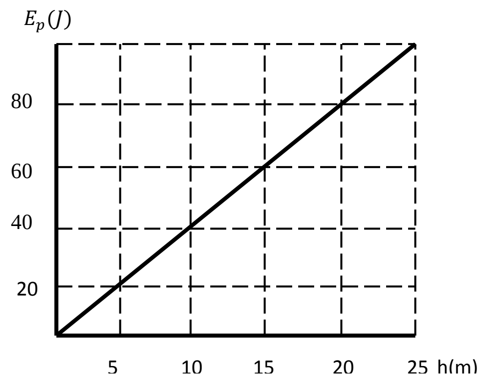
**c)** La fuerza que actúa sobre la partícula colocada en el punto C es:

$$\vec{F} = m.\vec{g}_c = 3.(3{,}20.10^{-12}\vec{\imath} - 12{,}8.10^{-12}\vec{\jmath}) =$$

$$= 9{,}6.10^{-12}\vec{\imath} - 38{,}4.10^{-12}\vec{\jmath}\ {}^{N}/_{kg}$$

$$\boxed{|\vec{F}| = m.|\vec{g_c}| = 3.1{,}32.10^{-11} = 3{,}96.10^{-11}\ N}$$

4. **La gráfica adjunta representa la energía potencial gravitatoria asociada a la posición de una masa de 1 kg en puntos próximos a la superficie de un planeta de 5000 km de radio. Determina la intensidad del campo gravitatorio en su superficie.**




Si se elige como origen del sistema de referencia la superficie del planeta, entonces para puntos próximos a dicha superficie la energía potencial gravitatoria asociada a la posición de un objeto de masa $m$ es $E_p = m.g.h$

El valor de la pendiente de la representación gráfica es igual al producto *m.g*. Por tanto:

$$\text{pendiente} = \frac{100J}{25m} = 4N = m.g = 1.g$$

Despejando:

$$\boxed{g = 4\ {}^{N}/_{kg}}$$

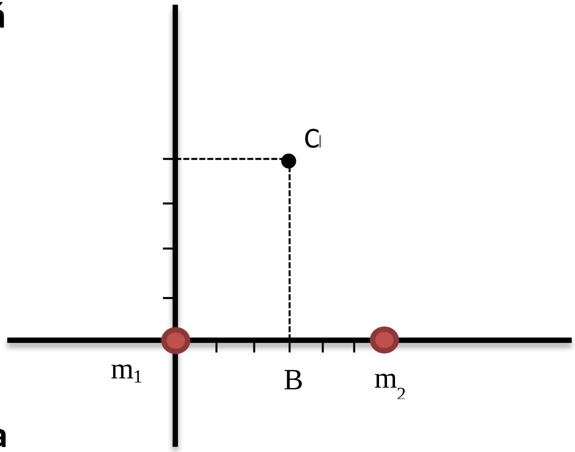
# 1.3. POTENCIAL

El potencial del campo gravitatorio en un punto, es el trabajo realizado por la fuerza central para trasladar la unidad de masa sometida a la acción del campo desde el infinito, hasta el punto.

$$\boldsymbol{V = -G\frac{M}{r}} \quad \left[{}^{\boldsymbol{J}}/_{\boldsymbol{kg}}\right]$$

# EJERCICIOS 1.3.

1. **Una partícula de masa $m_1$ = 2kg está situada en el origen de un sistema de referencia y otra partícula de masa $m_2$ = 4 kg está colocada en el punto A(6,0). Calcula el potencial gravitatorio en los puntos de coordenadas B(3,0) y C(3,4). ¿Qué trabajo se realiza al transportar una masa de 5 kg desde el punto B hasta el punto C?**




Aplicando el teorema de Pitágoras, el punto C está situado a 5m de cada una de las dos masas.

El potencial gravitatorio en un punto es igual a la suma de los potenciales creados por cada una de las masas.

$$\boldsymbol{V_B = V_1 + V_2 = -G\frac{m_1}{r_1} - G\frac{m_2}{r_2}} = -G\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{5}\right)$$

$$\boxed{= -1{,}344.10^{-10}\ J/_{kg}}$$

$$\boldsymbol{V_B = V_1 + V_2 = -G\frac{m_1}{r_1} - G\frac{m_2}{r_2}} = -G\left(\frac{2}{5} + \frac{4}{5}\right)$$

$$\boxed{= -8{,}004.10^{-11}\ J/_{kg}}$$

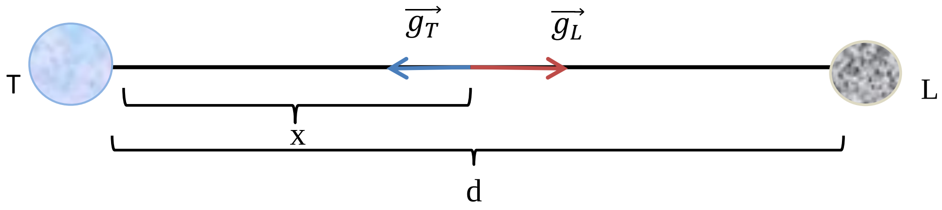
Aplicando la relación entre el trabajo y la fuerza conservativa y la energía potencial:

$$\boldsymbol{W_{B\to C} = -\Delta E_p = -m.\Delta U = -m.(V_C - V_B) =}$$

$$= -5.\left(-8{,}004.10^{-11} - (-1{,}344.10^{-10})\right) = \boxed{-2{,}668.10^{-10}\ J}$$

El trabajo que realiza la fuerza gravitatoria tiene signo negativo, por lo que el proceso no es espontáneo, ya que el sistema evoluciona hacia una situación de mayor energía potencial.

2. **Considerando a la Tierra y a la Luna aisladas de toda influencia exterior se desea saber el potencial gravitatorio en el punto en el que se anula el campo gravitatorio. La masa de la Tierra es igual a 5,98·10$^{24}$ kg y equivale a 81 veces la de la Luna y la distancia desde la Tierra hasta la Luna es de 384000 km.**




Sea d la distancia Tierra-Luna y P el punto pedido, que supongamos que está a una distancia x del centro de la Tierra. En ese punto los módulos de los campos gravitatorios creados por cada astro son iguales, $\boldsymbol{g_T = g_L}$.

$$\boldsymbol{G\frac{M_T}{x^2} = G\frac{M_L}{(d-x)^2}}$$

$$G\frac{81.M_L}{x^2} = G\frac{M_L}{(d-x)^2} \Longrightarrow \frac{9^2}{x^2} = \frac{1}{(d-x)^2}$$

Por tanto:

$$9.(d-x) = x$$

$$9d = 10x \Longrightarrow x = \frac{9}{10}384.10^6 = 3{,}456.10^8\ m$$

El potencial gravitatorio en ese punto es el debido a la Tierra y a la Luna:

$$\boldsymbol{V_P = V_T + V_L = -G\frac{M_T}{x} - G}\frac{M_L}{d-x} = -G\frac{M_T}{\frac{9}{10}d} - G\frac{\frac{M_T}{81}}{d-\frac{9}{10}d}$$

Operando:

$$V_P = -G\frac{10.M_T}{9d} - G\frac{10.M_T}{81d} = -\frac{100}{81}G\frac{M_T}{d}$$

Sustituyendo:

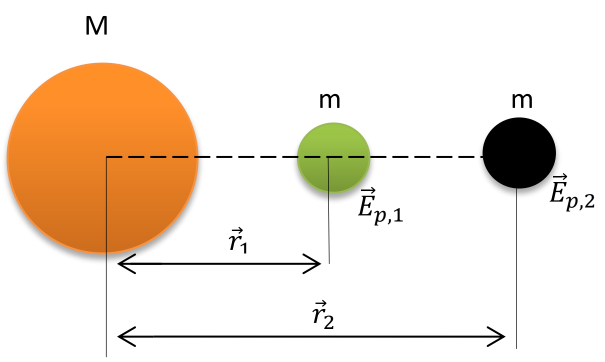
$$V_P = -\frac{100}{81}6{,}67.10^{-11}\frac{5{,}98.10^{24}}{3{,}84.10^{8}} = \boxed{-1{,}3.10^{6}\ {}^{J}/_{kg}}$$

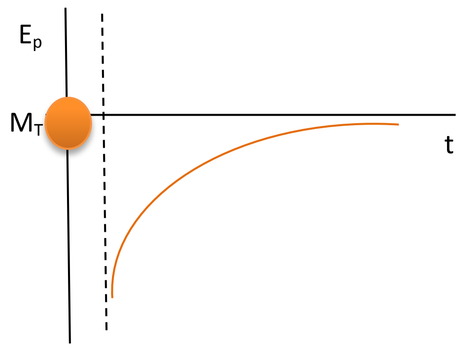
# 1.4. ENERGÍA PONTENCIAL GRAVITATORIA

Una partícula, de masa *m*, situada en un campo gravitatorio, está sometida a la acción de fuerzas gravitatorias y, debido a ello, posee energía potencial gravitatoria.

Representa el **trabajo realizado por la fuerza del campo** (cambiando el signo) para trasladar el cuerpo desde el infinito hasta un punto. Su valor viene dado por:

$$\boldsymbol{E_p(r) = -G\frac{Mm}{r}}$$



# EJERCICIOS 1.4.

1. **Dos partículas de masa $m_1$ = 4 kg y $m_2$ = 0,5 kg que están situadas a una distancia de 20 cm se separan hasta una distancia de 40 cm. Calcula la energía potencial asociada a las dos posiciones relativas y el trabajo realizado durante el proceso.**

La energía potencial asociada a las dos posiciones relativas es:

$$E_{p,inicial} = -G\frac{M.m}{r_{inicial}} = 6{,}67.10^{-11}\frac{4.0{,}5}{0{,}2} = \boxed{-6{,}67.10^{-10}\,J}$$

$$E_{p,final} = -G\frac{M.m}{r_{final}} = -6{,}67.10^{-11}\frac{4.0{,}5}{0{,}4} = \boxed{-3{,}335.10^{-10}\,J}$$

Aplicando la ley de la Energía potencial, el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria es:

$$W_{F_g} = -\Delta E_p = -\left(E_{p,final} - E_{p,inicial}\right) =$$

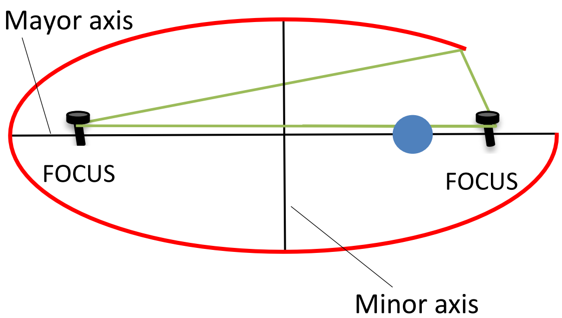
$$= -\left(-3{,}35.10^{-10} - (-6{,}67.10^{-10})\right) = \boxed{-3{,}335.10^{-10}\,J}$$

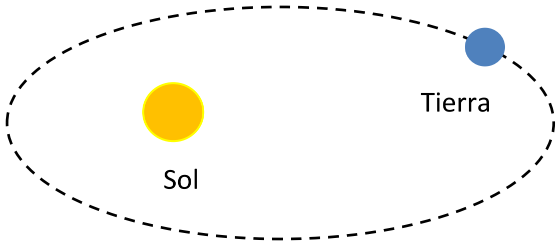
El trabajo que realiza la fuerza gravitatoria tiene el signo negativo, como corresponde a una transformación no espontánea, aumentando la energía potencial de la distribución.

# 1.5. LEYES DE KEPPLER

## Primera ley

***Los planetas describen órbitas elípticas, estando el sol en uno de sus***

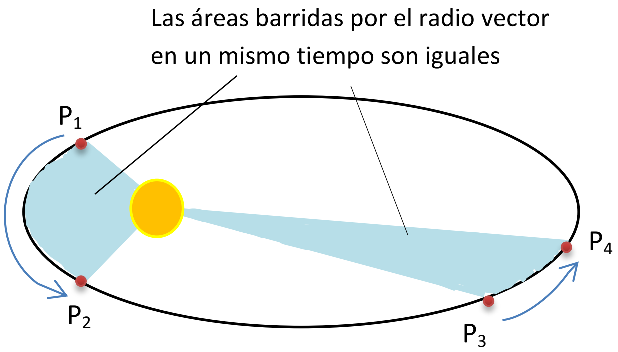



***focos.***

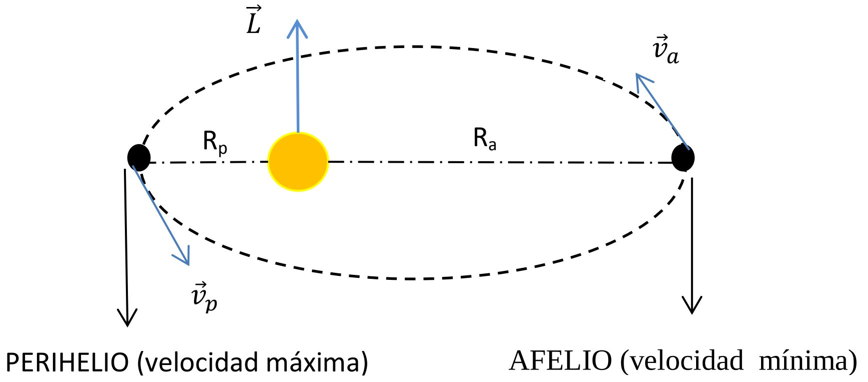
## Segunda ley

***El vector de posición de cualquier planeta con respecto del Sol (vector que tiene el origen en el Sol y su extremo en el planeta considerado) barre áreas iguales en tiempos iguales.***




$$\frac{dA}{dt} = cte.$$

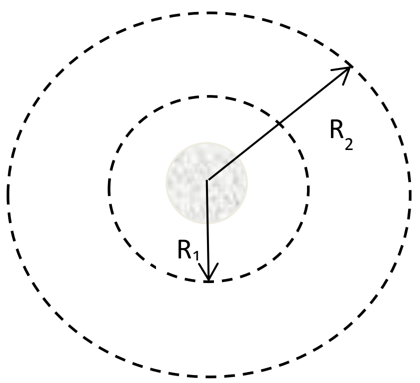
Velocidad areolar




$$\vec{L} = cte$$
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$
$$L = r.m.v.\sin\alpha$$
$$\boldsymbol{L = r.m.v}$$
$$L_a = L_p$$
$$r_a.\cancel{m}_o.v_a = r_p.\cancel{m}_o.v_p$$
$$\boxed{\boldsymbol{r_a.v_a = r_p.v_p}}$$

## Tercera ley

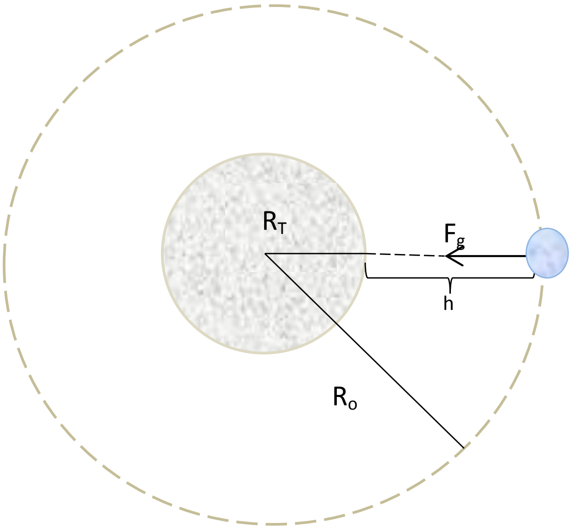
***Los cuadrados de los periodos de revolución (T) son proporcionales a los cubos de las distancias promedio de los planetas al Sol (r).***




$$\boldsymbol{\frac{T^2}{r^3} = k}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{T_1^2}{R_1^3} = \frac{T_2^2}{R_2^3}}}$$

# 1.6. VELOCIDAD DE ORBITACIÓN




Cuando un satélite orbita alrededor de un planeta, es debido a la acción de una fuerza gravitatoria que al ser radial tiene naturaleza centrípeta o normal.

$$\boxed{F_g = F_c}$$

$$\boxed{w = \frac{2\pi}{T} \qquad v = w . R_o}$$

$$G\frac{M_T . m}{R_T^2} = \frac{m . v_o^2}{R_o}$$

$$v_o = \frac{2\pi}{T} R_o$$

$$v_o^2 = G\frac{M_T}{R_o}$$

$$\frac{4\pi}{T^2} R_o^2 = G\frac{M_T}{R_o} \longrightarrow \frac{4\pi R_o^2}{T^2} = \frac{g_o . R_T^2}{R_o}$$

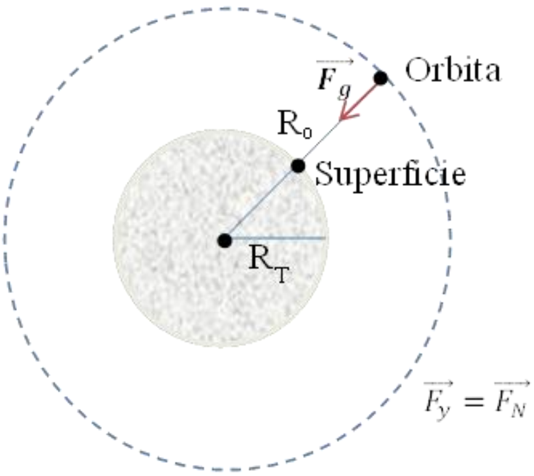
$$G . M_T = g_0 R_T^2$$

$$\boxed{\frac{T^2}{R_o^3} = \frac{4\pi^2}{G . M_T}} \longrightarrow \frac{T^2}{R_o^3} = \frac{4\pi^2}{g_o . R_T^2}$$

3º Ley de Keppler

# EJERCICIOS 1.6.

1. **Un satélite de 250 kg de masa, está en órbita circular en torno a la Tierra a una altura de 500 km sobre su superficie. Calcula su velocidad y su periodo de revolución. ¿Cuál es la energía involucrada en el proceso de poner al satélite en órbita con esa velocidad? Datos: Radio de la Tierra = 6380 km y $g_o$ = 6,8 m/s$^2$.**




Aplicando al satélite la ley de Newton y como la única fuerza que actúa sobre él es la iteración gravitatoria, se tiene:

$$\sum \vec{F} = m.\vec{a}_n$$

$$G\frac{M_T.m_s}{r^2} = m_s\frac{v^2}{r}$$

Despejando y como

$$g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2}$$

Se tiene que la velocidad orbital es:

$$v = \sqrt{G\frac{M_t}{r}} = \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{r}} = \sqrt{\frac{9{,}8.\,(6{,}38.\,10^6)^2}{6{,}38.\,10^6 + 500.\,10^3}} = 7{,}6.\,10^3\, {}^{m}/_{s}$$

El periodo de revolución es:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(6{,}38.\,10^6 + 500.\,10^3)}{7{,}6.\,10^3} = \boxed{5\,687{,}9s \cong 1{,}6\ h}$$

Aplicando la ley de la coservación de la energía entre la superficie de la Tierra y la órbita del satélite, se tiene que el trabajo realizado es igual a la variación de la energía mecánica del satélite.

$$W_{realizado} = \Delta E_c + \Delta E_p = E_{mecánica,final} - E_{mecánica,inicial} =$$

$$= E_{órbita} - E_{superficie}$$

La energía asociada al satélite en órbita es:

$$E_{órbita} = E_{p,órbita} + E_{c,órbita} = -G\frac{M_t.\,m_s}{r} + \frac{1}{2}m_s.\,v_{orbital}^2$$

Sustituyendo la velocidad orbital por su valor:

$$v_{orbital}^2 = G\frac{M_T}{r}$$

$$E_{órbita} = -G\frac{M_T.\,m_s}{r} + \frac{1}{2}m_s.\,G\frac{M_T}{r} = -\frac{1}{2}G\frac{M_T.\,m_s}{r}$$

Operando y sustituyendo:

$$E_{órbita} = -\frac{1}{2}.\,g_0.\,R_T^2\frac{m_s}{r} =$$

$$= -\frac{1}{2}.\,9{,}8.\,(6{,}38.\,10^6)^2\frac{250}{6{,}38.\,10^4 + 500.\,10^3} = -7{,}25.\,10^9 J$$

Si se considera que el satélite se lanza siguiendo la vertical, sin aprovechar el movimiento de rotación de la Tierra, la velocidad inicial en la superficie de la Tierra es igual a cero y la energía asociada a la posición del satélite sobre la superficie de la Tierra es solamente potencial:r

$$\boldsymbol{E_{superficie} = E_{p,superficie} = -G\frac{M_T.m_s}{R_T} = -g_0.R_T.m_s}$$

Sustituyendo:

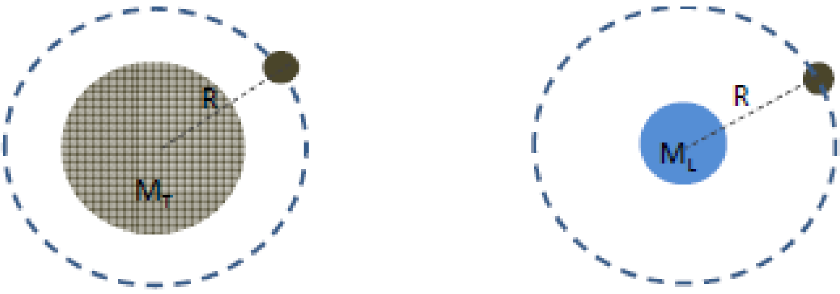
$$E_{superficie} = -9{,}8.6{,}38.10^6.250 = -1{,}56.10^{10}\,J$$

Por tanto, la energía necesaria para poner el satélite en órbita es:

$$W_{realizado} = \Delta E = E_{órbita} - E_{superficie} = -7{,}25.10^9 - (-1{,}56.10^{10}) =$$

$$\boxed{= 8{,}35.10^9\,J}$$

2. **Dos satélites idénticos están recorriendo sendas órbitas del mismo radio, el primero alrededor de la Tierra y el segundo alrededor de la Luna. ¿Cuál de ellos se mueve a mayor velocidad?¿Por qué? ¿Cuál es la relación entre sus velocidades si las masas de la Tierra y de la Luna son $6,0 \cdot 10^{24} kg$ y $7,3 \cdot 10^{22} kg$ respectivamente?**




En general:

$$G\frac{Mm}{R^2} = \frac{mv_o^2}{R} \rightarrow v_o^2 = G\frac{M}{R}$$

Para el satélite de la Tierra:

$$v_{OT}^2 = G\frac{M_T}{R_{OT}}$$

Para el satélite de la Luna:

$$v_{OL}^2 = G\frac{M_L}{R_{OL}}$$

Haciendo:

$$\frac{v_{OT}^2}{v_{OL}^2} = \frac{G\frac{M_T}{R_{OT}}}{G\frac{M_L}{R_{OL}}} = \frac{M_T R_{OL}}{R_{OT} M_L}$$

Como $R_{OT} = R_{OL}$

$$\frac{v_{OT}^2}{v_{OL}^2} = \frac{M_T}{M_L} = 82{,}3$$

$$v_{OT} = \sqrt{82{,}3}\,v_{OL} \cong 9{,}1\ v_{OL}$$

La velocidad del satélite alrededor de la Tierra será 9,1 veces mayor que el otro.

# 1.7. ENERGIA MECÁNICA DE UN CUERPO EN MOVIMIENTO BAJO LA ACCIÓN DE LA GRAVEDAD. TRABAJO

$$E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} \qquad (1)$$

Como:

$$\frac{mv^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2} \quad \rightarrow v^2 = G\frac{M}{r}$$

Sustituyendo en (1):

$$E_M = \frac{1}{2}m\left(G\frac{M}{r}\right) - G\frac{Mm}{r}$$

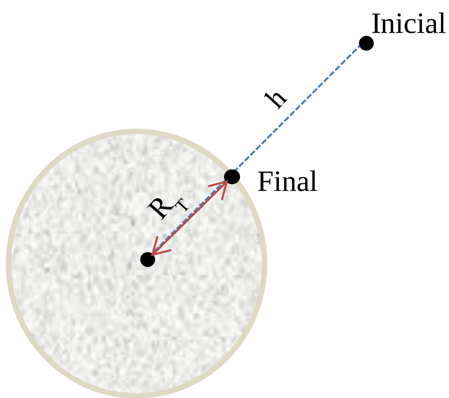
$$E_M = \frac{1}{2}G\frac{Mm}{r} - G\frac{Mm}{r}$$

$$\boxed{E_M = -\frac{1}{2}G\frac{Mm}{r}}$$

Notar que la energía mecánica y la energía cinética tienen el mismo valor absoluto, siendo este la mitad de la energía potencial.

# EJERCICIOS 1.7.

1. **Un meteorito de 1000 kg de masa se encuentra en reposo a una distancia sobre la superficie de la Tierra de cinco veces el radio terrestre. ¿Cuál es el valor de la energía mecánica asociada al meteorito en esa posición? Justifica el signo obtenido. Prescindiendo de la fricción con el aire. Calcula la velocidad con la que impactará contra la superficie de la Tierra. ¿Dependerá esa velocidad de la trayectoria que siga el meteorito? Dato: $R_T$ = 6370 km**




$$R_I = R_T + h$$

$$R_F = R_T$$

El meteorito está situado a una distancia $6R_T$ del centro de la Tierra y en reposo, por lo que la energía mecánica asociada a su posición es exclusivamente potencial gravitatoria.

$$E_{mecánica} = E_{potencial} = -G\frac{M_T.m_m}{6R_T}$$

Multiplicando y dividiendo por $R_T$, como:

$$g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2}$$

Y sustituyendo, resulta

$$E_{mecánica} = -\frac{g_0.R_T.m_m}{6} = -\frac{9,8.6,37.10^6.1000}{6} = \boxed{-1,04.10^{10}\,J}$$

El signo negativo significa que el meteorito está ligado al campo gravitatorio terrestre.

Al prescindir de la fricción con el aire, la única fuerza que actúa sobre el meteorito es la que aplica el campo gravitatorio terrestre, por lo que la energía mecánica asociada a la posición del meteorito se conserva durante la caída.

$$\boldsymbol{\Delta E_c + \Delta E_p = 0}$$
$$\boldsymbol{E_{c,inicial} + E_{p,inicial} = E_{c,superficie} + E_{p,superfici}}$$

La energía potencial gravitatoria asociada a la posición inicial del meteorito se transforma en energía potencial gravitatoria y energía cinética en la superficie de la Tierra.

$$\boldsymbol{0 - G\frac{M_T.m_m}{6R_T} = \frac{1}{2}m_m v_{superficie}^2 - G\frac{M_T.m_m}{R_T}}$$

Simplificando, multiplicando y dividiendo por $R_T$ y como:

$$g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2}$$

Se tiene:

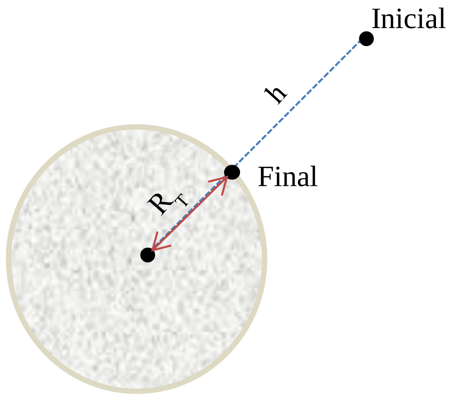
$$\frac{1}{2}v^2 = -\frac{1}{6}g_0.R_T + g_0.R_T = \frac{5}{6}g_0.R_T \Longrightarrow v = \sqrt{\frac{5}{3}g_0.R_T}$$

Sustituyendo:

$$v = \sqrt{\frac{5}{3}9{,}8\,.6{,}37.10^6} = 10\,200 = \boxed{10{,}2\ {}^{km}/_{s}}$$

El campo gravitatorio es conservativo, por lo que el trabajo que realizan las fuerzas del campo para modificar la posición del meteorito es independiente de la trayectoria seguida. Por tanto, la velocidad con que llega a la superficie de la Tierra es independiente de la trayectoria que recorra.

2. **Se lanza verticalmente, desde la superficie de la Tierra, un objeto con una velocidad inicial de 5 km/s. ¿Hasta qué altura subirá, si se prescinde del rozamiento con el aire? Dato: $R_T$ = 6370 km**




$$R_I = R_T + h$$

$$R_F = R_T$$

Si se prescinde del rozamiento con el aire, la única fuerza que actúa sobre el objeto es la atracción gravitatoria, por lo que la energía mecánica se conserva.

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0 \qquad E_{c,inicial} + E_{p,final} = E_{c,superficie} + E_{p,superfici}$$

La energía cinética y potencial en la superficie de la Tierra se transforman en energía potencial gravitatoria asociada a su posición final.

$$\frac{1}{2}.m_s.v_{superficie}^2 - G\frac{M_T.m_s}{R_T} = 0 - G\frac{M_T.m_s}{R_T + h}$$

Operando:

$$\frac{v_{superficie}^2.R_T - 2.G.M_T}{2.R_T} = -G\frac{M_T}{R_T + h} \Longrightarrow$$

$$\frac{R_T + h}{G.M_T} = \frac{2.R_T}{2.G.M_T - v_{superficie}^2.R_T}$$

Despejando:

$$h = \frac{2.G.M_T.R_T}{2.G.M_T - v_{superficie}^2.R_T} - R_T = \frac{v_{superficie}^2.R_T^2}{2.G.M_T - v_{superficie}^2.R_T}$$

Como:

$$g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2}$$

Se tiene que:

$$\boldsymbol{h} = \frac{v_{superficie}^2}{2.g_0 - \frac{v_{superficie}^2}{R_T}} = \frac{V_{superficie}^2.R_T}{2.g_0.R_T - v_{superficie}^2}$$

Sustituyendo:

$$\boldsymbol{h} = \frac{5000^2.6{,}37.10^6}{2.9{,}8.6{,}37.10^6 - 5000^2} = \boxed{1{,}59.10^6 m}$$

3. **En la Tierra un saltador de altura alcanza los 2m con un brinco que le comunica una velocidad inicial adecuada. Calcula el radio máximo que deba tener un asteroide esférico (de densidad igual a la terrestre), para que el saltador, al dar en el asteroide el mismo brinco que en la Tierra, salga despedido de éste escapando de su acción gravitatoria. Dato: radio medio de la Tierra, R = 6,37·10⁶ m**

La velocidad con la que salta el atleta en la superficie de la Tierra es:

$$v = \sqrt{2.g_0.h} = \sqrt{2.g_0.2} = 2\sqrt{g_0}$$

Para que el atleta se desligue del asteroide su energía mecánica tiene que ser como mínimo igual a cero.

Sea $m$ la masa del atleta, $M_A$ la del asteroide y $R_A$ su rdio.

$$E_c + E_p = \frac{1}{2}.m.v^2 - G\frac{m.M_A}{R_A} = 0$$

Simplificando y sustituyendo:

$$\frac{1}{2}\left(2\sqrt{g_0}\right)^2 = G\frac{M_A}{R_A} \Rightarrow 2.g_0 = G\frac{M_A}{R_A}$$

Las densidades de los astros son iguales, así que:

$$\frac{M_T}{R_T^3} = \frac{M_A}{R_A^3} \Rightarrow \frac{M_A}{R_A} = \frac{M_T}{R_T^3}R_A^2$$

Como:

$$g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2}$$

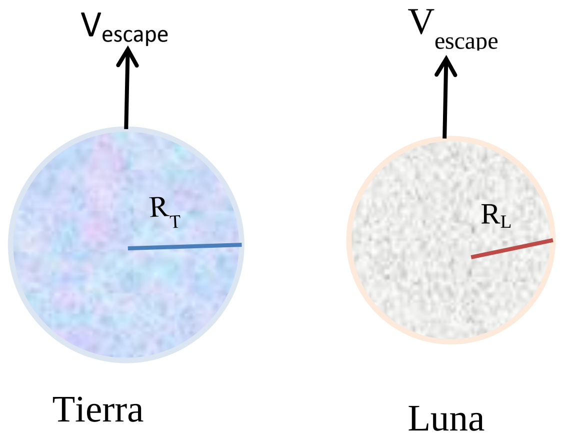
Se tiene que:

$$2.g_0 = G\frac{M_A}{R_A} \Rightarrow 2.G\frac{M_T}{R_T^2} = G\frac{M_T}{R_T^3}R_A^2 \Rightarrow R_A^2 = 2.R_T$$

Por tanto, el radio del asteroide es:

$$\boxed{R_A = \sqrt{2R_T} = 3\,569\ m}$$

4. **El radio de la Tierra es de 6400 km y el valor de la aceleración de la gravedad en su superficie es de 9,8 m/s²; la masa de la Luna es 1/81 veces la de la Tierra y su radio ¼ veces el radio terrestre. Con estos datos, determina la velocidad de escape desde la superficie de la Luna. Con el resultado obtenido, ¿se podría explicar la ausencia de atmósfera en la Luna?**




Una partícula se desliga de la luna cuando su energía mecánica es igual a cero

$$\frac{1}{2}.m.v_{escape}^{2} - G\frac{M_L.m}{R_L} = 0$$

$$v_{escape} = \sqrt{\frac{2.G.M_L}{R_L}}$$

Sustituyendo:

$$v_{escape} = \sqrt{\frac{2.G.\frac{M_T}{81}}{\frac{R_T}{4}}} = \frac{2}{9}\sqrt{\frac{2.G.M_T}{R_T}} = \frac{2}{9}v_{escape,Tierra}$$

Como:

$$g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2}$$

Operando se tiene:

$$v_{escape} = \frac{2}{9}\sqrt{2.g_0.R_T}$$

Sustituyendo:

$$v_{escape} = \frac{2}{9}\sqrt{2.9,8.6,4.10^6} = 2,5.10^3\ {}^{m}/_{s}$$

Este valor es menor que el de la velocidad media de agitación de las partículas gaseosas, por lo que la Luna no es capaz de tener una atmósfera.

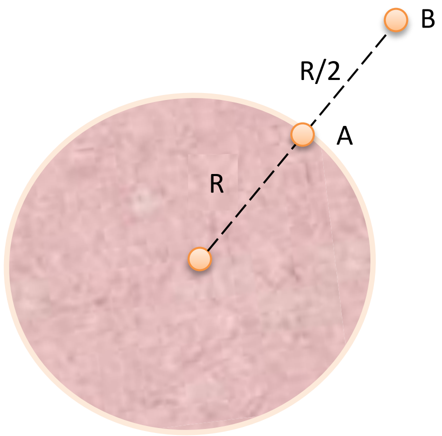
5. Un cierto planeta esférico tiene una masa $M = 1,25 \cdot 10^{23} kg$ y un radio $R = 1,5 \cdot 10^{6} m$. Desde su superficie se lanza verticalmente hacia arriba un objeto, el cual alcanza una altura máxima de R/2. Despreciando rozamientos, determine:

   a. La velocidad con que fue lanzado el objeto

   b. La aceleración de la gravedad en el punto más alto alcanzado pro el objeto

Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11} Nm^2 kg^2$

a)




$$E_A = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R}$$

$$E_B = -\frac{GMm}{R + \frac{R}{2}}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{R + \frac{R}{2}}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = -\frac{2GMm}{3R} \rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{R} \rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{2GM}{3R}}} = \boxed{1\,925\frac{m}{s}}$$

b) $mg = \frac{GMm}{\left(R + \frac{R}{2}\right)^2} \rightarrow g = \frac{4GM}{9R^2} = 1,65\frac{m}{s^2}$

6. **Un vehículo explorador recorre una órbita de radio r alrededor de un planeta. ¿Qué ocurre si accidentalmente se encienden los motores de forma que la velocidad lineal del vehículo se multiplica por $\sqrt{2}$?**

La velocidad e un objeto en órbita alrededor de un planeta es:

$$\boldsymbol{v_{órbita} = \sqrt{G\frac{M_{planeta}}{r}}}$$

Al encenderse los motores del vehículo pasa a ser:

$$v = \sqrt{2}.v_{órbita} = \sqrt{2.G\frac{M_{planeta}}{r}}$$

La energía mecánica del vehículo espacial es igual a la suma de su energía cinética y potencial gravitatoria.

$$\boldsymbol{E = E_c + E_p} = \frac{1}{2}.m.v^2 - G\frac{M_{planeta}.m}{r}$$

Sustituyendo la velocidad por su nuevo valor, se tiene:

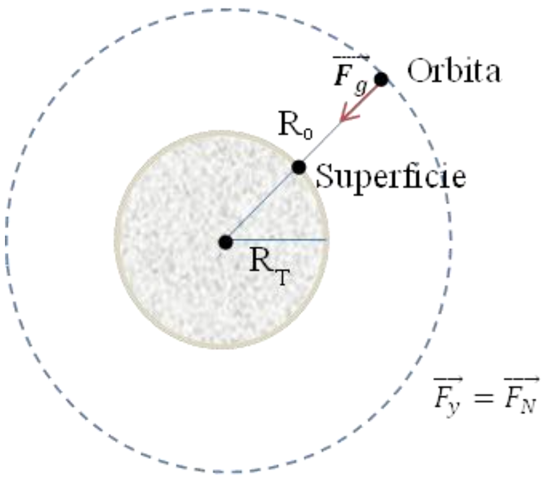
$$\boldsymbol{E = \frac{1}{2}m.2.G\frac{M_{planeta}}{r} - G\frac{M_{planeta}.m}{r} = 0}$$

Por lo que el vehículo espacial deja de orbitar al planeta quedando desligado de él. Para cualquier objeto puesto en órbita alrededor de un astro cuya velocidad lineal se multiplique por $\sqrt{2}$, su energía mecánica es igual a cero y se desliga del astro.

**7. Determina la energía necesaria para colocar en una órbita de radio r = 3. $R_T$ a un satélite artificial de 65 kg de masa, lanzándolo desde un punto del ecuador terrestre y teniendo en cuenta el movimiento de rotación de la Tierra. ¿Cuál es el periodo del satélite? Dato: $R_T$ = 6380 km y $g_o$ = 9,8 m/$s^2$.**

Debido al movimiento de rotación de la Tierra, los puntos situados sobre el ecuador tienen velocidad máxima. Al lanzar los satélites artificiales desde puntos próximos al ecuador y hacia el este, se aprovecha la energía cinética debida a la rotación de la Tierra. La velocidad del satélite es la misma que la del punto de lanzamiento, por lo que la energía mecánica asociada al satélite cuando está situado sobre la superficie de la Tierra es:

$$E_{superficie} = E_c + E_p = \frac{1}{2}.m.v_T^2 - G\frac{M_T.m_s}{R_T}$$




Como:

$$g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2} \Longrightarrow E_{superficie} = \frac{1}{2}.m_s.v_T^2 - g_0.m_s.R_T$$

La velocidad del satélite en su órbita se determina aplicando la segunda ley de Newton:

$$\sum \vec{F} = m.\vec{a}_n$$

$$G\frac{M_T.m_s}{r^2} = m_s\frac{v_{órbita}^2}{r} \Longrightarrow v_{órbita}^2 = G\frac{M_T}{r}$$

La energía mecánica asociada al satélite en su órbita es:

$$E_{órbita} = \frac{1}{2}m_s.v_{órbita}^2 - G\frac{M_T.m_s}{r} = \frac{1}{2}m_s.G\frac{M_T}{r} - G\frac{M_T}{m_s} =$$

$$= -\frac{1}{2}G\frac{M_T.m_s}{r}$$

Como $r = 3R_T$, se tiene:

$$E_{órbita} = \frac{1}{2}G\frac{M_T.m_s}{3R_T} = -\frac{1}{6}g_0.m_s.R_T$$

Aplicando la ley de la conservación de la energía, el trabajo realizado es igual a la variación de la energía mecánica del satélite.

$$W_{poner\ en\ órbita} = E_{órbita} - E_{superficie} =$$

$$= -\frac{1}{6}g_0.m_s.R_T - \left(\frac{1}{2}.m_s.v_T^2 - g_0.m_s.R_T\right)$$

Operando:

$$W_{poner\ en\ órbita} = \frac{5}{6}g_0.m_s.R_T - \frac{1}{2}.m_s.v_T^2$$

La velocidad de un punto del ecuador es:

$$v_T = \frac{2\pi R_T}{T} = \frac{2\pi.6{,}38.10^6}{24\ .3600} = 464\ {}^{m}/_{s}$$

Sustituyendo:

$$W_{poner\ en\ órbita} = \frac{5}{6}9{,}8.65.6{,}38.10^6 - \frac{1}{2}.65.464^2 = \boxed{3{,}38.10^9\ J}$$

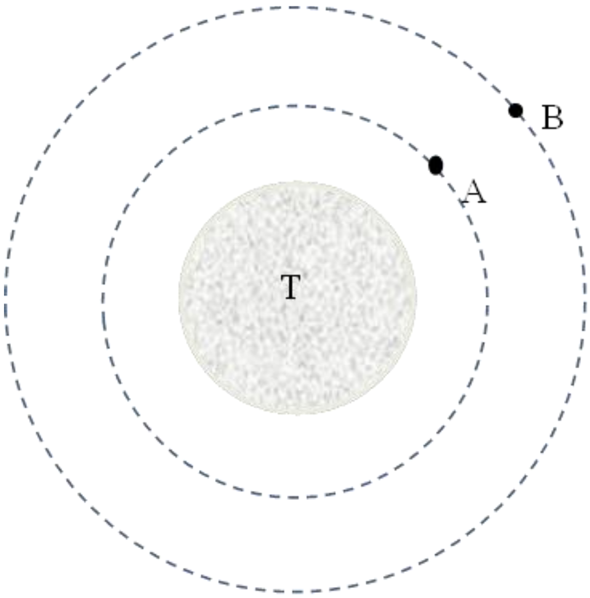
Aplicando las realciones entre el periodo y la velocidad, se tiene:

$$v_{órbita} = \sqrt{G\frac{M_T}{r}} \Longrightarrow T = \frac{2\pi.r}{v} = \frac{2\pi.r}{\sqrt{G\frac{M_T}{r}}} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G.M_T}}$$

Como $r = 3R_T$, se tiene:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{27\,R_T^3}{G.M_T}} = 6\pi\sqrt{\frac{3.R_T}{g_0}} = \boxed{26342{,}6\ s \cong 7{,}3\ h}$$

8. **Un satélite artificial de comunicaciones, de 500 kg de masa, describe una órbita circular de 9000 km de radio en torno a la Tierra. En un momento dado, se decide variar el radio de su órbita, para lo cual enciende uno de los cohetes propulsores del satélite, comunicándole un impulso tangente a su trayectoria antigua. Si el radio de la nueva órbita descrita por el satélite, en torno a la Tierra, es de 13000 km, calcula la velocidad del satélite en la nueva órbita y la energía involucrada en el proceso. Datos: $R_T$ = 6380 km y $g_o$ = 9,8 m/s$^2$.**




Aplicando al satélite la ley de Newton y como la única fuerza que actúa sobre él es la iteración gravitatoria, se tiene:

$$\sum \vec{F} = m.\vec{a}_n$$

$$G\frac{M_T.m_s}{r^2} = m_s\frac{v^2}{r}$$

Despejando y como

$$g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2}$$

Y sustituyendo se tiene que:

$$v_{final} = \sqrt{G\frac{M_T}{r_{final}}} = \sqrt{g_0\frac{R_T^2}{r_{final}}} = \sqrt{9{,}8\frac{(6{,}38.10^6)^2}{13.10^6}} =$$

$$= \boxed{5{,}5.10^3\ m/_s}$$

El trabajo realizado por un agente externo para modificar la órbita del satélite es igual a la variación de su energía mecánica.

$$W_{realizado} = \Delta E_c + \Delta E_p = E_{mecánica,final} - E_{mecánica,inicial}$$

La energía asociada al satélite en órbita es igual a la denominada energía de enlace:

$$E_{órbita} = E_p + E_c = -G\frac{M_T.m_s}{r} + \frac{1}{2}m_s.v_{orbital}^2$$

Sustituyendo la velocidad orbital por su valor:

$$v_{orbital}^2 = G\frac{M_T}{r}$$

$$E_{órbita} = -G\frac{M_T.m_s}{r} + \frac{1}{2}m_s.G\frac{M_T}{r} = -\frac{1}{2}G\frac{M_T.m_s}{r}$$

Operando y como

$$g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2}$$

Se tiene que:

$$E_{órbita} = -\frac{1}{2}g_0.R_T^2.\frac{m_s}{r}$$

La energía involucrada en el proceso es la diferencia de las energías mecánicas de las dos órbitas:

$$W_{realizado} = \Delta E = E_{órbita,final} - E_{órbita,inicial} =$$

$$= -\frac{1}{2} g_0 . R_T^2 \frac{m_s}{r_{final}} + \frac{1}{2} g_0 . R_T^2 \frac{m_s}{r_{inicial}}$$

Operando:

$$\Delta E = \frac{1}{2} g_0 . R_T^2 . m_s \left( \frac{1}{r_{inicial}} - \frac{1}{r_{fianl}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} g_0 . R_T^2 . m_s . \left( \frac{r_{final} - r_{inicial}}{r_{final} . r_{inicial}} \right)$$

Sustituyendo:

$$\Delta E = \frac{1}{2} . 9{,}8 . (6{,}38 . 10^6)^2 . 500 . \left( \frac{13 . 10^6 - 9 . 10^6}{9 . 10^6 . 13 . 10^6} \right) = \boxed{3{,}4 . 10^9 \, J}$$

Que lógicamente es una cantidad positiva.